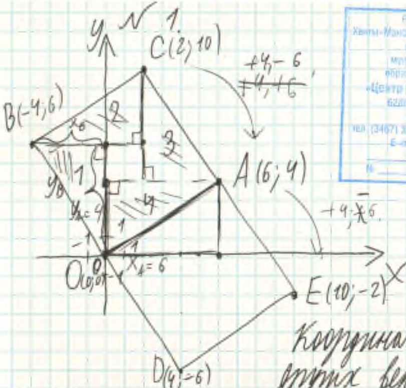
MAT-36

№ 1.



Координатами двух других вершин квадрата являются либо точки B и C, либо D и E.

$x_A = 6$, $y_A = 4$.

$\Delta 1 = \Delta 2 = \Delta 3 = \Delta 4$, т. к. они прямоугольные, их гипотенузы равны (т. к. AOBC – квадрат), равны их углы

Тогда $x_B = -y_A = -4$, $y_B = x_A = 6$, $B(-4; 6)$.
$C(-4+6; 6+4)$, $C(2; 10)$.
$D \in$ прямой $OB \Rightarrow$ ~~D(0−(4)~~ $D(0-(-4); \overset{0-6}{\cancel{6-0}})$,
$D(4; -6)$; $E \in$ прямой $AC \Rightarrow E(\cancel{6}\ 10; -2)$.

твет: либо $B(-4;6)$ и $C(2;10)$, либо $(4;-6)$ и $E(10;-2)$. 4б

№ 2.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ − ?

$\frac{x}{1}+x=\frac{y}{x}+y \quad |\cdot xy$

$x \neq y \neq 0.$

$x^2+x^2y=y^2+y^2x$

$x^2-y^2+x^2y-y^2x=0$

$(x-y)(x+y)+yx(x-y)=0$

$(x-y)(x+y+yx)=0$

$\left[\begin{array}{l} x-y=0, \\ x+y+yx=0, \end{array}\right.$ $y=x$ – неверно, т.к. по условию $x \neq y$.

$x+y+yx=0$

$y(1+x)=-x$

$y=\frac{-x}{x+1}$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{-x}{x+1}}=\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x}=\frac{1-x-1}{x}=-1.$ Других вариантов нет, т.к. x и y имеют единственные значения:

$\frac{x}{\frac{-x}{x+1}}+x=\frac{-x}{x(x+1)}+\frac{-x}{x+1}$

$-x-1+x=-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+1} \quad |\cdot(-1)$

$\frac{2}{x+1}=1$

$x+1=2, \ x=1.$

$y=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}.$

Ответ: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=-1.$ 7б

№ 3.

Пусть искомое число – x.

Его собственные делители: $x_1, x_2 \dots x_n$.

Тогда $x_n=x_1^2+1$

x_n и x_1 должны быть простыми числами, ~~чтобы~~ иначе получим противоречие: либо $x_n \neq x_1^2+1$, ~~и~~ либо x имеет ещё один собственный делитель, который больше x_n.

если $x_1=2$, то $x_n=5 \Rightarrow x=10.$

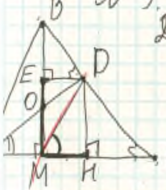
если $x_1>2$, ~~то~~ и x_1 – чёт, то таких чисел нет, если $x_1>2$ и x_1 – нечёт, то x_n – чёт, ~~то~~ и таких чисел нет.

Ответ: 10. ~~7б~~

№ 4.

Кол-во девочек – натуральное число.
Кол-во будет натуральным числом,
если $y \cdot 0{,}48 < x < 0{,}49 \cdot y$ (y – кол-во
всех учеников, x – девочек), ~~где числа~~
~~$y \cdot 0{,}48$ и $0{,}49 \cdot y$~~
Кол-во будет наименьшим, если разница
между числами $y \cdot 0{,}48$ и $y \cdot 0{,}49$
будет наименьшей, при том x – натуральное
~~Это число~~ $y = 27$.
Ответ: 27 учеников. 3б

№ 5.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ – острые,
BM – высота, AD – биссектриса
Док-ть: $\angle DMC > 45^\circ$
Док-во:
Проведем высоту DH в
$\triangle$ DMC и высоту DE в $\triangle$ BDM.
По теореме о биссектрисе:

$\frac{OM}{BO} = \frac{AM}{AB}$ и $\frac{DC}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

Чтобы доказать, что $\angle DMC > 45^\circ$, нужно доказать, что $DH > MH$, т.е. $EM > DE$,
$\triangle BED \sim \triangle DHC$ по первому признаку.

$\frac{BE}{DH} = \frac{ED}{HC} = \frac{BD}{DC}$

$\frac{BE}{DH} = \frac{ED}{HC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{BE}{EM} = \frac{MH}{HC}$ ~~$HC = \frac{AC \cdot ED}{AB}$~~ $CH = \frac{MH \cdot EM}{BE}$

~~$\frac{BE}{EM} = \frac{MH \cdot AD}{AC \cdot ED} = \frac{AB}{AC}$~~ ~~$\frac{MH}{HC} = \frac{BE}{DH}$~~

~~$\frac{BE}{DH} =$~~ ~~$\frac{EM}{BE} = \frac{MH}{HC}$~~ ~~$\frac{HC}{MH}$~~ ~~$\frac{EM}{MH} = \frac{DH}{ED}$~~

~~$EM \cdot MH = BE \cdot HC$~~ ~~$DH = \frac{BE \cdot DC}{BD}$~~

~~$BE = \frac{BD \cdot DH}{DC}$~~ ~~$ED = \frac{BE \cdot HC}{DH}$~~

~~$HC = \frac{ED \cdot DC}{BD}$~~ ~~$\frac{EM}{MH} = \frac{DH \cdot DH}{BE \cdot HC}$~~

~~$EM \cdot MH = \frac{BD \cdot DH}{DC} \cdot \frac{ED \cdot DC}{BD}$~~

~~$EM \cdot MH = DH \cdot ED$~~

$\triangle BMC \sim \triangle DHC$ по первому признаку

$\frac{DH}{BM} = \frac{CH}{CM} \Rightarrow \frac{EM}{BE+EM} = \frac{CH}{MH+HC}$

$\cancel{\frac{EM}{BE+EM} = \frac{MC-MH}{CM}}\ \cancel{\frac{CH}{MH+CH}}$

$\cancel{EM(MH+CH) = CH(BE+EM)}$

$\cancel{EM\cdot MH + EM\cdot CH = CH\cdot BE + CH\cdot EM}$

$\cancel{EM\cdot MH = CH\cdot BE}$

$\triangle BED \sim \triangle MDC$ по первому признаку

$\frac{ED}{MC} = \frac{BE}{BM}$

$\frac{MH}{MH+CH} = \frac{BE}{BE+EM}$

$\cancel{\frac{MH}{MH+\frac{MH\cdot EM}{BE}} = \frac{BE}{BE+EM}}$

$\cancel{\frac{BE\cdot MH}{BE\cdot MH+MH\cdot EM} = \frac{BE}{BE+EM}}$

$\cancel{EM = DH = \frac{CH\cdot BE}{ED} = \frac{CH\cdot BE}{MH}}$

$\cancel{MH = MC - HC = \frac{ED\cdot(BE+EM)}{BE} - HC =}$

$\cancel{\frac{MH\cdot(BE+EM)}{BE} - HC}$

$\cancel{\frac{BE+EM}{BE} - HC = 1}$

$\cancel{1 + \frac{EM}{BE} - HC = 1}$

$\cancel{\frac{EM}{BE} = HC}$

$\cancel{EM = BE\cdot HC}$

$AM = \frac{OM\cdot AB}{BO}$

$\frac{EM}{MH} = \frac{DH}{ED} = \frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{AM+MC}{AB} = \frac{\frac{OM\cdot AB}{BO}+MC}{AB}$

$= \cancel{\frac{OM\cdot MC}{BO}} = \frac{\frac{OM\cdot AB+BO\cdot MC}{BO}}{AB} = \frac{OM\cdot AB+BO\cdot MC}{BO\cdot AB} =$

$= \frac{OM}{BO} + \frac{MC}{AB} \Rightarrow \cancel{1}$ $\quad \cancel{\frac{EM}{MH} > 1}$

$= \frac{BM-BO}{BO} + \cancel{\frac{AC-AM}{AB}} =$ $\quad \cancel{EM > MH \Rightarrow \angle DMC > 45^\circ}$

$= \underbrace{\frac{BM}{BO} - 1}_{>0} + \frac{MC}{AB} > 1 \Rightarrow EM > MH \Rightarrow \angle DMC > 45^\circ$

3б

МАТ-48

№2

$x \neq y$

$$\frac{x}{y} + x = \frac{y}{x} + y$$

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = y - x$$

$$\frac{x^2 - y^2}{yx} = -1(x-y)$$

$$\frac{(x-y)(x+y)}{x \cdot y} = -1(x-y)$$

т.к. $x \neq y \Rightarrow x - y \neq 0$, то $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{xy} = -1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = -1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1,$$

других решений нет т.к. были сделаны равносильные преобразования и никакие корни не потерялись

Ответ: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1$

)

Возьмём число a, допустим его мак. делитель равен p_{max}, тогда мин. делитель будет

$p_{min} = \frac{a}{p_{max}} \Rightarrow a = p_{min} \cdot p_{max}$

Предположим что число a удовлетворяет условию, тогда

$p_{max} - p_{min}^2 = 1 \Rightarrow a = p_{min}(p_{min}^2 + 1)$

~~если p_{min} - чётное, то его можно представить в виде $p_{min} = q \cdot 2$, тогда из $p_{min}(p_{min}^2+1) = 2 \cdot q(4q^2+1)$ и тогда p_{min} не будет мин. делителем т.к. из него можно достать двойку. Единственный случай когда~~

Если p_{min} - чётное тогда p_{min}^2+1 - нечётное, $\Rightarrow p_{min}(p_{min}^2+1)$ - чётное число $(2 \cdot H = 2) \Rightarrow a \vdots 2 \Rightarrow$ мин. делитель будет 2 и если брать $p_{min} \neq 2$, то оно не будет являться мин. делителем. А если $p = 2$, то $a = 10$ и условия выполняются ($p_{min} = 2$; $p_{max} = 5$; $p_{max} - p_{min}^2 = 4 = 1$)

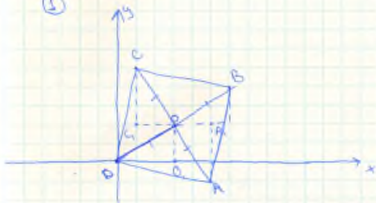
Если p_{min} - нечётное, тогда $p_{min}^2 + 1$ - чётное $\Rightarrow p_{min}(p_{min}^2+1) = a$ - чётное $(k \cdot 2 = 2) \Rightarrow$ мин делитель a будет 2 и если $p_{min} \neq 2$, то он не будет являться мин. числом $\Rightarrow$ условию удовлетворяет только $a = 10$;

~~Ответ 10.~~

Ответ: $a = 10$

15

①



$ABCD$ - квадрат

$D(0;0)$ $B(6;4)$

~~BC - диагональ квадрата $\Rightarrow$ $\Rightarrow BC = a\sqrt{2}$, где a - сторона кв.~~

т.к. $ABCD$ квадрат, то $BO = OC = OD = OA$ (O - точка пересеч. диагонали

DO - гипот. в прямоуг. треуг. $\triangle DOO_1$, где $\angle DO_1O = 90°$ и катеты равны 2 и 3 $\Rightarrow OC, AO, BO$ так же будут гипотенузами в прямоугол. треугольниках со катетами 2 и 3, например. CO это гипотен. в $\triangle CC_1O$, где $C_1O = 2$; $C_1C = 3$, где $O(3;2)$; $C_1(1;2) \Rightarrow$

$\Rightarrow C_1(x, ; y_c + 3) \Rightarrow C(1;5)$

Аналогично находим $A(5;-1)$

Проверим является ли $ABCD$ - квадратом.

$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{26}$

$AD=\sqrt{(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2}=\sqrt{26}$

$BC=\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}=\sqrt{26}$

$CD=\sqrt{(x_C-x_D)^2+(y_C-y_D)^2}=\sqrt{26}$ ч.т.д.

Ответ: $A(5;-1)$; $C(1;5)$ 5б

n - кол-во мальчиков и девочек

Если $n<50$, то $1\% < 0,5$ человека, тогда разница $0,49n-0,48n<0,5$, так же $0,49n$ и $0,48n$ ...жны начинаться с разных чисел, а при $n<50$, такого n что бы оба условия выполнялись

$n \geq 50$, если $n=50$ то $24<n_g<24,5 \Rightarrow n \neq 50$ (т.к. промежутке $(24;24,5)$ нет целого числа)

если $n=51$, то $24,48<n_g<24,99 \Rightarrow n\neq 51$ (т.к. промежутке $(24,48;24,99)$ нет целого числа)

если $n=52$ то $24,96<n_g<25,48 \Rightarrow n_g=25$, $n_м=27$

$\Rightarrow$ мин $n=52$

Ответ: 52 ребенка 5б

(5)

Дано:

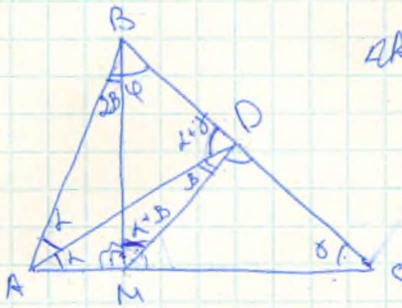
$\triangle ABC$ - остроуг.

AD - бисс.

BM - высота

Док-ть, что

$\angle DMC \geq 45^\circ$



Допустим $\angle DMC \leq 45^\circ$,

~~$\angle ADM+\angle DAM = \angle ADM + \angle DAB$~~

тогда

~~$\angle ADM+\angle MAD \geq 45^\circ$~~

~~$\angle DMC \geq 45^\circ$~~

~~$\angle MCD+\angle CDM \leq 135^\circ$~~

~~$\angle MBD+\angle MDB \geq 135$~~

~~$\angle MCD+\angle CDM \neq \angle MBD+\angle MDB$~~

~~$\angle AMD \neq \angle AMD+\angle$~~

$\triangle ABC$:

$2\alpha+\gamma+2\beta+\varphi=180^\circ$

$\triangle MBD$:

$\angle BMD=180-\varphi-\alpha-\gamma-\beta=\alpha+\beta$

$\triangle AMD$

$2\alpha+2\beta+90=180 \Rightarrow \alpha+\beta=45^\circ$ 5б

МАТ-09

Задача 4.

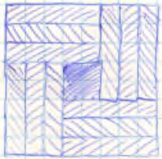
$8 \cdot 8 = 64$ клеточки - все поле

$1 \cdot 5 = 5$ клеточек - 1 прямоугольник

$64 : 5 = 12$ и остаток 4

~~12 клеточек прямоугольниками можно заполнить прямоугольниками в виде их попарного расположения~~

12 прямоугольниками можно заполнить поле, и еще останутся свободными 4 клеточки.



Ответ: 12 прямоугольников 1×5 - наибольшее число, которое можно вырезать из квадрата 8×8.

12

Задача 2.

$5c = 2a - 1$

$5a = 7b + 7$

Из этих двух равенств можно понять, что:

$c < a$

$a > b$

a, b, c - неравные числа

По условию b - двузначное число, а если $a > b$, значит, a - неоднозначное число.

Методом подбора и перебора найти наименьшее значение c.

Можно подставлять только нечетные числа вместо c, т.к. если подставить четные, то нельзя будет найти a, ~~например~~ например:

$5 \cdot 2 = 2a - 1$

$10 = 2a - 1 \Rightarrow 2a \neq 11$, т.к. $2a$ - обязательно четное число, а 11 - нечетное.

$5 \cdot 1 = 2a - 1 \Rightarrow c = 1$

$5 = 6 - 1 \Rightarrow a = 3$

$5 \cdot 3 = 7b + 7$

$15 = 8 + 7 \Rightarrow$ 1 вместо c не подходит, т.к. по условию все числа натуральные, а $7b = 8$.

$5 \cdot 3 = 2a - 1 \Rightarrow c = 3$

$15 = 16 - 1 \Rightarrow a = 8$

$5 \cdot 8 = 7b + 7$

$40 = 33 + 7 \Rightarrow$ 3 вместо c не подходит, т.к. $33 : 7$ - ненатуральное число.

$5 \cdot 5 = 2a - 1 \Rightarrow c = 5$

$25 = 26 - 1 \Rightarrow a = 13$

$5 \cdot 13 = 7b + 7$

$65 = 58 + 7 \Rightarrow$ 5 вместо c не подходит, т.к. $58 : 7$ - ненатуральное число.

$5 \cdot 7 = 2a - 1 \Rightarrow c = 7$

$35 = 36 - 1 \Rightarrow a = 18$

$18 \cdot 5 = 7b + 7$

$90 = 83 + 7 \Rightarrow$ 7 вместо c не подходит, т.к. $83 : 7$

$9 = 2a - 1 \Rightarrow c = 9$

$5 = 4b - 1 \Rightarrow a = 23$

$3 \cdot 5 = 7b + 7$

$15 = 108 + 7 \Rightarrow$ 9 вместо c не подходит,

к. $108 : 7$ - ненатуральное число.

$11 = 2a - 1 \Rightarrow c = 11$

$5 = 56 - 1 \Rightarrow a = 28$

$8 \cdot 5 = 7b + 7$

$40 = 133 + 7$

$33 : 7 = 63$ - натуральное число $\Rightarrow b = 63$

Значение $c = 11$ подошло, т.к. соответ-

ствует условиям:

$< a$

$> b$

- двузначные, натуральные числа.

Поэтому $c = 11$.

Ответ: 11 - наименьшее значение,

которое может принимать c.

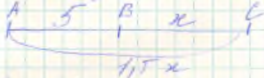
78

Задача 3

Пусть x - длина отрезка BC, тогда

$1{,}5x$ - длина отрезка AC (известно, что $AB = 5$)

1-ый случай:



Составим уравнение:

$5 + x = 1{,}5x$

$5 = 1{,}5x - x$

$5 = 0{,}5x$

$x = 5 : 0{,}5$

$x = 10$ - длина BC

$1{,}5x = 10 \cdot 1{,}5 = 15$ - длина AC

2-ой случай:

Составим уравнение

$1{,}5x + x = 5$ $\quad$ $x = 2$ - длина BC

$2{,}5x = 5$ $\quad$ $1{,}5x = 2 \cdot 1{,}5 = 3$ - длина AC

$x = 5 : 2{,}5$

3-ий случай.

$\underbrace{B \quad 5 \quad | A \quad 1,5\kappa | C}_{x}$ — невозможен,

т.к. длина всего отрезка не может быть меньше его части.

Ответ: 1 случай: $BC = 10$

$AC = 15$

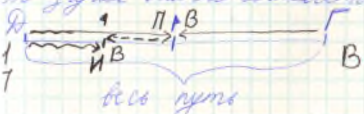
2 случай: $BC = 2$

$AC = 3$

75

Задача 1

По задаче нужно составить схему.



где Д - деревня, Г - город

- половина пути

1 - половина оставшегося пути

И - Иван $\longrightarrow$ - путь Петра

П - Петр $\longleftarrow$ - путь Василия

В - Василий $\leftarrow$-- - путь Василия

$\rightsquigarrow$ - путь Ивана.

По условию Петр и Василий [illegible] шли на половине пути и встре[illegible] ли одновременно, а это значит, что их скорости одинаковы. Так, если бы они двигались в одном направлении, они бы одновременно [illegible] не пошли.

Когда Петр и Василий встретились в этой точке, они прекратили движение. Когда Василий прошел половину оставшегося пути, и Петр прошел столько же. Из этого можно понять, что за это время ~~он от~~ каждый из них прошел

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ пути.

Когда Василий встретил Ивана, Иван прошел только половину половина всего пути, то есть $\frac{1}{2}$ пути

А т.к. все бежали из точек равноудалённо, то эти расстояния они прошли за одно и то же время.
Пусть x - время движения всех участников, а y - расстояние.
Тогда
$\frac{1}{4}\, y/x$ - скорость Ивана
$\frac{3}{4}\, y/x$ - скорость Петра
$\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{1} = \frac{3}{1} = 3$
Ответ: в 3 раза быстрее Ивана двигался Петя. 7б

Задача 5.
Задачу можно решить методом подбора, тогда получится последовательность:
1 7 2 8 3 9 4 10 5 11 6 12 14 17 15
18 16 19 13 20
Наименьшая разность - 2.

Во всех остальных случаях либо разность будет 1, либо 2.
Ответ: 2 - наибольшее число шагов
15

MAT-01

№1

Иван проехал $\frac{1}{4}$ всего пути, когда встретил Василия, значит Василий проехал $\frac{3}{4}$ пути. Скорости Петра и Василия одинаковы, т.к. выехав одновременно на встречу друг другу, они встретились на середине пути. После этого Василий проехал $\frac{1}{4}$ пути значит и Петр тоже, а всего $\frac{3}{4}$ пути, в то время как Иван только $\frac{1}{4}$ пути.

$\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 1} = 3$ (р)

Ответ: в 3 раза Пётр двигался быстрее Ивана.

7б

№2

a, b, c

$5c = 2a - 1$ $(2a-1)$ – кратно 5, значит a при умножении на 2 должно оканчиваться на 6, т.к. $6 - 1 = 5$.

$5a = 7b + 7$ $(7b + 7)$ – кратно 5, значит при умножении на 7 у этого числа (b) должна единица быть либо 3, либо 8, т.к. при сложении с 7 даёт число, кратное 5.

$5a = 7b + 7$ и оканчивается на 3, т.е. при последующем умножении на 2 даёт 6. Предположим, что $a = 63$, то $5 \cdot 63 = 315$, $315 - 7 = 308$, 308 кра-

$5c = 2a - 1$ Подставляем 63 вместо a, $2 \cdot 63$ будет 126 и вычитаем 1, получаем 125.
125 кратно 5. При делении мы получаем 25. $c = 25$.
Ответ: наименьшее значение для $c = 25$
0б

3
I вариант

1) $1,5 \cdot 5 = 7,5$ (см) – AC
2) $7,5 - 5 = 2,5$ (см) – BC

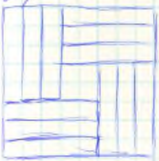
AC = 7,5 см, BC = 2,5 см
Ответ: AC = 7,5 см, BC = 2,5 см

II вариант

1) $5 : 1,5 \approx 3$ (см) – AC
2) $5 - 3 = 2$ (см) – BC

$AC \approx 3$ см, BC = 2 см.
Ответ: AC = 3 см, BC – 2 см. 3б

№4



Ответ: 12 прямоугольников.

5б

№5
Предположим, что ряд построен таким образом 1 20 2 19 ... 11 10, это не подходит, т.к. результат последней разности будет 1. Можно вместо ряд, в котором результат будут задействованы.
1 и 11, 2 и 12, 3 и 13, 4 и 14, 5 и 15, 6 и 16, 7 и 17, 8 и 18, 9 и 19, 10 и 20.
Повторов нет.
Итого можно составить ряд:
11 1 12 2 13 3 14 4 15 5 16 6 17 7 18 8 19 9 20 10.
Ответ: 10 шаров. 7б.

МАТ-30

№1

пусть x - расстояние от дуба до города, тогда $2x$ от дуба до деревни
в 12:00 пешеход находится на $\frac{2}{3}a$ от города
и на $\frac{1}{3}a$ от дуба
в 12:40 т.к. он шел в деревню $\Rightarrow$ он
находится на дороге от дуба до деревни
и от него до города $2a$, а до дуба $a \Rightarrow$
$\Rightarrow$ за 40 минут он проходит $\frac{4}{3}a \Rightarrow$ за 10 мин
он пройдет $\frac{1}{3}a$.
В 12:40 ему осталось пройти a до деревни
со скоростью $\frac{1}{3}a$ в 10 мин он дойдет
до деревни за 30 мин $\Rightarrow$ прибудет туда
в 13:10.
Ответ: 13:10 7б

№ 2

Если любые 4 подряд идущие числа в сумме дают 30 ⇒ каждое число повторяется через 3. Если число ≥ 15, то 3 числа идущие после должны быть < 15, но в круге 14 чисел, а 14 не делится на 4 ⇒ сумма последние 3-х и 1-ой 4-х чисел будет 30 т.к. там 2 числа ≥ 15 ⇒ все числа < 15 и т.д.

7б.

№ 4

Если 275 : 5, то получится 55, а 55 это сумма чисел от 1 до 10 ⇒ в ряду будут эти числа умноженные на 5: 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50.

Ответ: 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50.

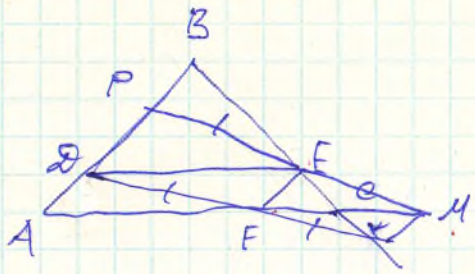
4б

№ 5

Нет, т.к. он не сможет вернуться из-за того что ему придется закрыть все 8 горизонталей и вертикалей, на 1 ход по 1 и по этому он не сможет вернуться.

0б

№ 3



Дано

$\triangle ABC$

$DE \parallel AC$

$FE \parallel AB$

$DF = FK$

~~Док-ть~~

Найти

$BE : EC$

Решение

1) Доп постр $PE \parallel DK$:

2) $PE \parallel DF$ (по постр)

$EF \parallel DP$ (по усл)

$\Rightarrow DPEF$ - пар-м $\Rightarrow PE = DF$, DF

3) $DF = \frac{1}{2} DK \Rightarrow PE = \frac{1}{2} DK$

$PE \parallel DK$

$\Rightarrow PE$ - ср. линия

4) $\Rightarrow BE = EK$

4) Доп. постр $EM \parallel FK$ и $KM \parallel EF \Rightarrow EFKM$ - пар-м

5) FM и EK диагонали $\Rightarrow KC = EC \Rightarrow EC = \frac{1}{2} EK$

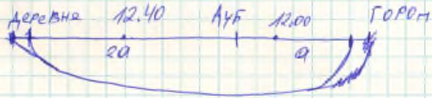
6) $EK = BE \Rightarrow \frac{1}{2} EK = \frac{1}{2} BE = EC$ (5) $\Rightarrow BE : EC = 2:1$

Ответ: 2:1

7б

МАТ-34

№1.



$S = 3a$

в 12.00 вдвое ближе к ~~дубу~~ дубу
чем к ~~город~~ городу

до города $\frac{2}{3}a$

до дуба $\frac{1}{3}a$

до деревни $2\frac{1}{3}a$

дальше в 12.40 в двое ближе
к дубу чем к городу

до города 2a
до дуба a
до деревни a

⇓

за 40 мин пройдено $1\frac{1}{3}a = \frac{4}{3}a$

$V_П = \frac{1}{3}a/10$ мин

до деревни a, что составляет $\frac{3}{3}a$ и 30 мин

⇓

прибытие в деревню 12:40 + 0:30
13:10

Ответ: почтальон прибудет в деревню в 13:10

7б

№2 что бы получилось так
нарисуем

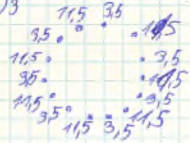
П1


$5+10=15$ $5+10+5+10=10+5+10+5=$
$=30$

П2


6 и 9

$6+9=15$ $9+6+9+6=6+9+6+9=$
$=30$

П3


$11{,}5+3{,}5=15$ $3{,}5+11{,}5+3{,}5+11{,}5=$
$=30$

надо взять пару положительных чисел дающих в сумме 15. 0 и 15 брать уже нельзя т.к 0 не положительное. если берем два числа с их суммой 15 и пройдем по кругу то любые 4 числа подряд равны в сумме 30.

что и требовалось доказать. 0б

N 4

5 10 15 20 25 30 35 40 45 50

Все числа в этой строке натуральные
первое число больше 1 (5>1)
Каждое число делится на 5 и больше предыдущего

$5+10+15+20+25+30+35+40+45+50=275$

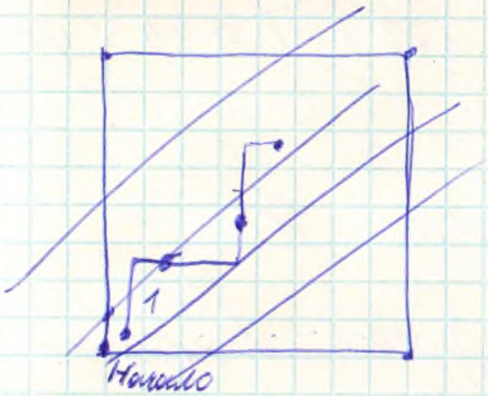
чисел в строке 10

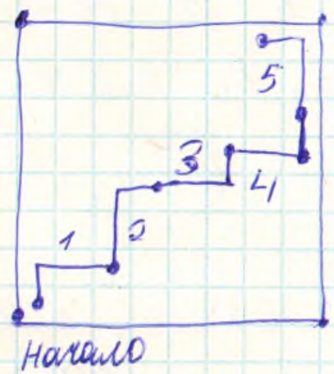
Ответ: на доске написаны числа (5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50;)

4б

N 5

Самый короткий способ побывать во всех вертикалях и горизонталях это пройти по диагонали. Тогда конь должен начинать в одном из углов и идти в противоположный.

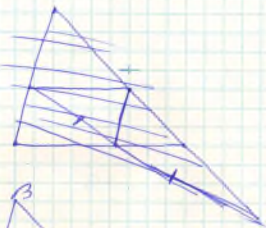


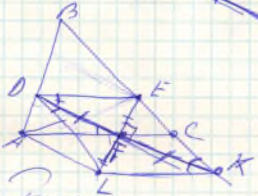


чтобы пройти по диагонали конь тратит минимум 5 ходов. Надо вернутся обратно быстрее всего по своим следам на это уходит 10 ходов а конь сделал всего 8 значит он не мог за 8 ходов пройти все вертикали и горизонтали.

Ответ: Не мог. 0б

№3





Дано
$\triangle ABC$
$E \in BC$
$F \in AC$
$D \in AB$
$EF \parallel AB$
$ED \parallel AC$
$(BC) \cap (DF) = K$
$DF = FK$
Найти
$\frac{BE}{EC}$

Решение

1) $EF \parallel DB$
и $AF = FK$
⇓
EF - средняя линия $\triangle BDK$
$BE = EK$ $EF = \frac{1}{2} BD$

2) удвоим EF - медиану $\triangle DEK$
и построим пар-м $DEKL$

3) т.к. $EF = \frac{1}{2} BD$
$DBEL$ - пар-м
т.к $BD \parallel EL$ $BD = 2EF = EL$

4) $\angle EDF = \angle DFA = FKL$
как накр. леж.
$\angle DFA = \angle CFK$ как верт.
~~$\angle CFK =$~~

5) $\triangle BE$ - равнобедр
⇓
$BE = ED = EK$
⇓
$\triangle DEK$ - равноб
⇓
$DEKL$ - ромб
$\angle FKL = \angle EKF = \angle CFK$
$\triangle FEK$ - равноб
$FC = CK$
$\angle FEK = 90° - \angle EKF$ ⇒ $\angle EFK = \angle$

$CF = FC = EK$

CF - медиана

$\angle EFK$ - прямоугольный

медиана проведенная к гипотенузе ~~является~~ равна ее половине

$CF = \frac{1}{2} EK$

$EK = BE$

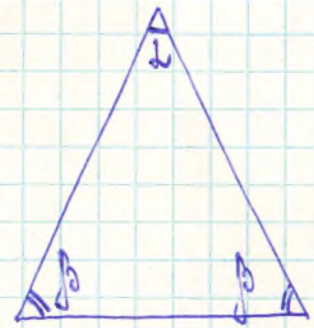
$BE = 2CF = 2EC$

$\frac{BE}{EC} = \frac{2}{1}$

Ответ: $\frac{BE}{EC} = \frac{2}{1}$

MAT-84

1.



$\alpha + 2\beta = \pi$

$\cos\alpha + 2\cos\beta \to \max$

$\cos\alpha + 2\cos\beta = \cos(\pi - 2\beta) + 2\cos\beta = -\cos 2\beta + 2\cos\beta =$

$= -(2\cos^2\beta - 1) + 2\cos\beta = -2\cos^2\beta + 2\cos\beta + 1$

$t = \cos\beta$

$y = -2t^2 + 2t + 1$

$y_m = ?\ (t_B)$

$t_B = -\frac{b}{2a}$

$t_B = \frac{1}{2}, \cos\beta = \frac{1}{2}$

$\cos\alpha + 2\cos\beta = -(2\cos^2\beta - 1) + 1 = \frac{3}{2}$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}, \alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$

Ответ: $\frac{3}{2}$

7

Предположим противное, что $\exists n \in \mathbb{Z}$, ~~что~~ $k \in \mathbb{Z}$

$n^2 + 3n + 5 = 121k$

$f(x) = n^2 + 3n + 5$

$D = 9 - 4 \cdot 5 < 0$,

$n^2 + 3n + 5 > 0 \Rightarrow 121k > 0$, $k \geq 1$

$n^2 + 3n + (5 - 121k) = 0$

$D = 9 - 4(5 - 121k) = 4 \cdot 121k - 11 = 11(44k - 1)$

$n_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{11(44k-1)}}{2}$

$44k - 1 = 11p^2$, $p \in \mathbb{N}$

$\cancel{4k - \frac{1}{11}}$ $4k - \frac{1}{11} \neq p^2$

$\sqrt{11(44k-1)}$ иррационально ? $\forall k \geq 1$

$n_{1,2}$ – иррационально, но n – целое по условию,

противоречие, т.ч.д.

0.5

$\dfrac{a}{a+1} < \dfrac{b}{b+1} + \dfrac{c}{c+1}$, $a < b + c$

a, b, c – положительные числа,

$(a+1)(b+1)(c+1) > 1$.

$a(b+1)(c+1) < b(a+1)(c+1) + c(a+1)(b+1)$

$(ab + a)(c+1) < (ab + b)(c+1) + (ac + c)(b+1)$

$abc + ab + ac + a < abc + ab + bc + b + abc + ac + bc + c$

$a < b + c + 2bc + abc$

$a < b + c$, $2bc + abc > 0$,

$\Rightarrow a < b + c + 2bc + abc$

т.ч.д.

7

5.

	Лгуны	Рыцари
Левые	x_1	x_2
Центральные	y_1	y_2
Правые	z_1	z_2

$x_2 + y_2 + z_2$ – ?

$y_1 + z_1 + x_2 = 2015$

$x_1 + z_1 + y_2 = 809$

$x_1 + y_1 + z_2 = 511$

$2(x_1 + y_1 + z_1) + x_2 + y_2 + z_2 = 3035$

$(x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2 + z_2) = 2017$

$(x_1 + y_1 + z_1) = 2017 - (x_2 + y_2 + z_2)$

$2(2017 - (x_2 + y_2 + z_2)) + (x_2 + y_2 + z_2) = 3035$

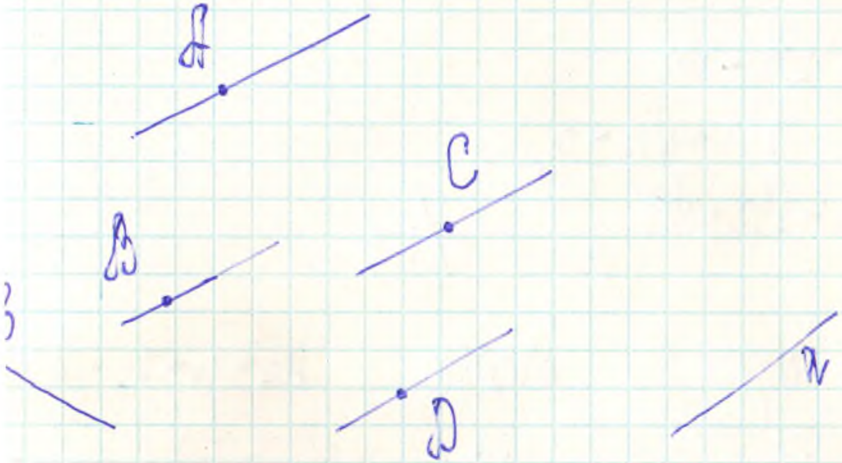
$2 \cdot 2017 - (x_2 + y_2 + z_2) = 3035$

$x_2 + y_2 + z_2 = 2 \cdot 2017 - 3035$

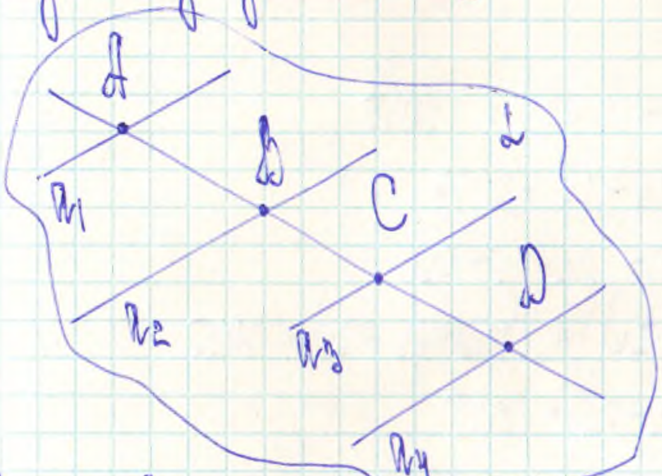
$x_2 + y_2 + z_2 = 999$

Ответ: 999

7



точки лежат на четырех прямых $\parallel a$,
=> каждая прямая содержит хотя бы одну точку.
$AB \parallel b$, $AC \parallel b$, $AD \parallel b$, причем эти прямые проходят из одной точки?, => они совпадают.



Через две пересекающиеся прямые проходит пл-ть и при том только одна.

$a_1 \parallel a_2 \parallel a_3 \parallel a_4$.
=> Любые прямые $\parallel AB$ и пересекающие одну из четырех прямых $\parallel a$, будут лежать в пл-ти α
=> точки будут лежать в пл-ти α.
ч.т.д.

О5'

МАТ-71

№1

$y = ax + b$

$y = cx + d$

$\begin{cases} y_1 < 0 \\ x_1 < 0 \end{cases}$ т.к. точка пересечения графиков находится в третьей четверти ($(x_1; y_1)$ – точка пересечения графиков)

$ax_1 + b = cx_1 + d$

$ax_1 - cx_1 = d - b$

$x_1 = \dfrac{d-b}{a-c}$

т.к. $x_1 < 0$, то и $\dfrac{d-b}{a-c} < 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} d - b > 0 \\ a - c < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} d - b < 0 \\ a - c > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow (a-c)(d-b) < 0$

$ad - cd - ba + cb < 0$

$ad + cb < cd + ba$

ч.т.д. 7

положительные, то

$x_1>0$, $x_2>0$, $x_3>0$, $x_4>0$; $x_5>0$; $x_6>0$; $x_7>0$, $x_8>0$, $x_9>0$

№3

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

1) $x_1 x_2 = 2$
2) $x_1 x_4 = 2$
3) $x_2 x_3 = 2$
4) $x_2 x_5 = 2$
5) $x_3 x_6 = 2$
6) $x_5 x_6 = 2$
7) $x_4 x_5 = 2$
8) $x_4 x_7 = 2$
9) $x_5 x_8 = 2$
10) $x_6 x_9 = 2$
11) $x_7 x_8 = 2$
12) $x_8 x_9 = 2$

$x_1 = \frac{2}{x_2} = \frac{2}{x_4} = x_5 = \frac{2}{x_6} = \frac{2}{x_8} = x_7 = x_9 = x_3 \Rightarrow$

$x_1 = x_3 = x_5 = x_7 = x_9 = a$ $\quad a>0$

$x_2 = x_4 = x_6 = x_8 = b$ $\quad b>0$

a	b	a
b	a	b
a	b	a

$ab = 2$ $\quad a = \frac{2}{b}$

$5a + 4b = x$ (x - сумма)

$\frac{10}{b} + 4b = x \quad | \times b$ $\quad$ ОДЗ: $b \neq 0$

$10 + 4b^2 - xb = 0$

$D \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \cdot 4 \cdot 10 \geq 0$

$x^2 \geq (4\sqrt{10})^2$

(~~$x \geq 4\sqrt{10}$~~)

~~т.к. обе части неотрицательные~~

$|x| \geq 4\sqrt{10}$

$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \\ 5a+4b=x \end{cases} \Rightarrow x>0$

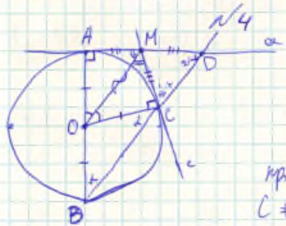
(~~$\begin{cases} x>0 \\ |x| \geq 4\sqrt{10} \end{cases}$~~) $\quad \begin{cases} x>0 \\ |x| \geq 4\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow$

$x \geq 4\sqrt{10}$

ч.т.д.

7

№4



Дано: $\omega(O; r)$, AD - диаметр, A - точка касания прямой a; $C \neq A$, $C \neq D$; C - точка касания прямой c. $a \cap BC = D$

~~Док-ть~~: $M = a \cap c$

Док-ть: $AM = MD$

Док-во:

I) $\triangle AMO = \triangle CMO$ (по трём сторонам), т.к.

1) OM - общая; 2) $AO = OC = r$

касат. к окружности, исходящ. из одной точки).

Пусть $\angle OBC = \alpha$, тогда

$\angle OCB = \alpha$ (как углы при основ. в равнобед. $\triangle BOC$ ($\triangle BOC$ - равнобед, т.к. $OC = OB$, как радиусы окруж.))

В $\triangle ABO$ $\angle A = 90°$ (как угол при касающейся к окруж.)

$\angle B = \alpha$, тогда $\angle D = 180° - \angle A - \angle B \Rightarrow$

$\angle D = 90° - \alpha$.

$\angle BCO + \angle OCM + \angle MCD = 180°$ (как смежн.)

$\angle OCM = 90°$ (как угол при касающейся к окруж.)

$\angle MCD = 180° - \angle OCM - \cancel{\angle BC}\ \angle BCO = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$

$\angle MCD = 90° - \alpha$

$\triangle CMD$ - равнобед с основ. CD (т.к. $\angle MCD = \angle MDC = 90° - \alpha$) $\Rightarrow CM = MD$

$AM = CM = MD \Rightarrow AM = MD$

ч. т. д.

7

№ 2

Пусть Коля задумал числа:

a, b, c, d. ~~тогда~~

(~~Шестая сумма неизвестна, т.к.~~)

$(a+b)+(a+c)+(a+d)+(b+c)+(b+d)+(c+d) =$

$= 17 + 19 + 20 + 24 + 26 + x$ (x - шестая сумма)

$3(a+b+c+d) = 106 + x = S$ (S - сумма сумм)

$a + b + c + d = 35 + \frac{1+x}{3} = S/3$ (1)

~~(т.к. $a + b$ равно одной из сумм и $b + c$ равно любой другой из этих сумм, а все суммы целые числа, то $a + b + c + d$ - целое число $\Rightarrow 35 + \frac{1+x}{3}$ - целое число, а это возможно при $x = 3n+1$ $n \in \mathbb{Z}$)~~

Всего возможно 3 комбинации (для пары), при которых будет выполн. (1)

$(a+b)+(c+d) = 35 + \frac{1+x}{3}$

$(a+d)+(c+b) = 35 + \frac{1+x}{3}$ (2)

$(a+c)+(b+d) = 35 + \frac{1+x}{3}$

7

... только ...

...ачe условие (2) не выполняется.

...ет: 23.

6 б.

№5

$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$ (партий было сыграно)

~~- кол-во проигрышей / выигрышей~~

~~- кол-во ничейных партий~~

~~$k + 2a = 190 \cdot 2$ (кол-во результатов каждого игрока)~~

~~$+ a = 190$~~

$...+ a' = 19$ (кол-во партий для одного игрока)

- кол-во поражений
- кол-во выигрышей
- кол-во ничьих

$b + 0 \cdot c + \frac{1}{2} a' \leq 19$

$+ \frac{1}{2} a' \leq 19$

$\leq 39 - 2b$

...к. нет игроков с одинаковым ...ол-вом баллов, то (~~нет игроков выигравших одинаковое кол-во раз~~)

... во всей таблице не могло

произойти менее (190/2) 85 ничейных партий => что ничейных - партий ~~все~~ может быть 84 или меньше ничейных партий т.е менее половины всех партий, но т.к. у каждого игрока разн. кол-во баллов, то будет игрок выигравший больше чем сыгравший вничью ?

0 б.

MHT - 55

(1)

$$-\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$y - y = ax - cx + b - d$$

$$0 = (a-c)x + (b-d)$$

$$(a-c)x = d - b$$

$$x = \frac{d-b}{a-c}$$

$$x < 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d-b}{a-c} < 0$$

домножив на $(a-c)^2$ не меняя знака,
т.к. $(a-c)^2 > 0$; $a \neq c$, т.к. иначе
графики не пересекутся.

$$\frac{d-b}{a-c} \cdot (a-c)^2 < 0$$

$$(d-b)(a-c) < 0$$

$$ad - ab - dc + bc < 0$$

$$ad + bc < ab + dc$$

ч.т.д.

Пусть S - сумма всех 4 чисел,
x - шестая сумма

Все 6 сумм можно разделить на 3 пары так, что сумма каждой пары равна S, ~~потому что~~ (это возможно, т.к. есть сумма каждой пары, а 4 - сумма 2 пар)

a_1 a_2 a_3 a_4 - числа задуманные Вами.

a_1+a_2 и a_3+a_4; a_1+a_3 и a_2+a_4

a_1+a_4 и a_2+a_3 - все такие пары

попробую разделить известные суммы на пары: наименьшая сумма всегда должна быть в паре с наибольшей, иначе пары будут не равны.

I случай

7 - наименьшая сумм
- наибольшая

и 26 - пара,
чет в сумме S,
~~сначала 24~~
= 43;
$19 = 24$;

17 - наим;
x - наибольшее

17 и x - пара
следующие равные ~~числа~~ суммы
19 и 26 должны

II случай

$19+26 \neq 20+24$

⇓

x - не наибольш

20 и 24

III случай

x - наименьшее,

пары: x и 26

17 и 24 = 41

19 и 20 = 39

$\neq$ - суммы пар не равны, x - не наименьшее

Я рассматривала эти пары именно крайние потому что суммы можно упорядочить:

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4$, тогда

$$\underline{a_1+a_2} \geq \underline{a_1+a_3} \geq \underline{a_1+a_4} \geq \underline{a_2+a_4} \geq \underline{a_3+a_4}$$
$$a_1+a_3 \geq \underline{a_2+a_3} \geq a_2+a_4$$

(пары подчеркнуты одинаково)

из рассмотренных случаев я получила:

17 и 26; 19 и 24 - пары и это единственный случай, значит 20 и x - пара

$20+x = S = 17+26$

$x = 17+26-20 = 23$

Ответ: ~~26~~ 23

(3)

x	$\frac{2}{x}$	x
$\frac{2}{x}$	x	$\frac{2}{x}$
x	$\frac{2}{x}$	x

пусть в центральной клетке стоит x, тогда в 4 соседних стоит $\frac{2}{x}$, а в угловых $\frac{2}{2/x} = x$.

я получил таблицу в которой сумма $- 5\cdot x + 4\cdot\frac{2}{x}$

так же известно, что $x>0$, значит $\frac{2}{x}$ тоже >0

Методом от противного, попытаюсь найти такой x, что $5x + 4\cdot\frac{2}{x} < 4\sqrt{10}$.

$5x+\frac{8}{x} < 4\sqrt{10} \quad |\cdot x \qquad (x>0)$

$5x^2 - 4\sqrt{10}\,x + 8 < 0$

$\frac{D}{4} = \left(\frac{4\sqrt{10}}{2}\right)^2 - 5\cdot 8 = 40-40=0$

$x = \frac{2\sqrt{10}\pm 0}{5} = \sqrt{1,6}$

$5(x-\sqrt{1,6})(x-\sqrt{1,6}) < 0$

$5(x-\sqrt{1,6})^2 < 0$

$(x-\sqrt{1,6})^2 \geq 0$, как квадрат числа (не отр)

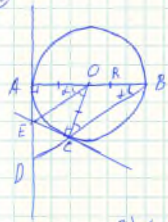
значит таких x нет. ч.т.д.

$\Downarrow$

сумма чисел в клетках не меньше $4\sqrt{10}$

7б

(4)



R - радиус окр $AO=OB=OC=R$

E - точка пересечения касательных

1) $\triangle AOE = \triangle COE$ ($AO=CO=R$; OE - общая; $\angle A=\angle C=90°$; ...)

$\Downarrow$

$\angle AOE = \angle COE = \alpha$

2) $\angle AOC = \angle OCB + \angle OBC$, как внешний угол при $\triangle OBC$;

3) В $\triangle OBC$: $OB=OC=R \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB$

$\Downarrow$

$\angle OBC = \angle OCB = \frac{1}{2}\angle AOC = \alpha$

4) $\triangle AOE \sim \triangle ABD$ ($\angle AOE = \angle ABD = \alpha$; $\angle A$ - общий)

$\Downarrow$

$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AO} = \frac{2R}{R} = 2 \Rightarrow AD = 2AE$

$ED = AD - AE = 2AE - AE = AE$

$\Downarrow$

E - середина AD

ч.т.д.

7б

(5)

1) Изменю систему оценивания на эквивалентную данной, для более удобного док-ва:

за победу — +1 очко;
за ничью — 0 очков
за поражение — −1 очко:

		×2	−1
ПБ	+1	+2	+1
Н	$+\frac{1}{2}$	+1	+0
ПР	+0	+0	−1

2) ~~тогда~~ Пойду от противного и допущу, что ситуации, когда нет участника, у которого побед больше чем ничьих:

Пусть W — общее кол-во побед, L — общее кол-во ~~нич~~ поражений; очевидно, что $W=L$, ~~и где~~ $w_i; n_i$ и l_i — кол-во побед, ничьих и поражений соответственно у i-го участника (1-й — занял первое; 2-й — второе и т.д.)

победитель ~~не~~ выиграл не больше, чем сыграл в ничью, значит набрал не больше 9 баллов.

$n_1 \cdot 0 + w_1 \cdot 1 + l_1(-1)$ $\quad n_1 > w_1$

$n_1 = 10;\ w_1 = 9$

№уч	Баллы	W	N	L
1	9	9	10	0
2	8	8	11	0
3	7	.	.	.
4	.	.	.	.
5	.	.	.	.
6				
.				
.				
.	−9			
20	−10	0	9	10

частный пример

т.к. это победитель, и у всех разное кол-во баллов, сумма очков будет не больше чем в случае, когда все участники расположились подряд (набрали каждое значение от 9 до −10) т.е. сумма баллов $S \le \frac{(-10+9)\cdot 20}{2} = -10$

ар. прогрессия от 10

Заметим, что при моей системе подсчета очков, кол-во очков $= W_1 - L_1$, значит сумма всех $S = (W_1 + W_2 + W_3 \ldots W_{20}) - (L_1 + L_2 + \ldots$

$S = W - L = 0$, т.к. $W = L$

$0 = S \le -10$ — противоречие, значит предположение неверно и такой

...чаю систему оценивания на
...стную данной, для более удобного

...ду – +1 очко;
...чью – 0 очков
...ажение – −1 очко;

	−1
+2	+1
+1	+0
+0	−1

...оду от противного и допущу, что
..., когда нет участника, у которого
...ольше чем ничьих:

W – общее кол-во побед; L – общее
...во поражений; очевидно, что $W=L$,
W_i, N_i и L_i – кол-во побед, ничьих и
...ий соответственно у i-го участника
...ое первое; 2-й – второе и т.д.)

победителем выиграл не больше, чем играл в ничью, значит набрал не больше 9 баллов:

$n_1 \cdot 0 + W_1 \cdot 1 + L_1(-1)$ $\quad n_1 > W_1$

$n_1 = 10;\ W_1 = 9$

№уч	баллы	W	n	L
1	9	9	10	0
2	8	8	11	0
3	7			
4	⋮	⋮	⋮	⋮
5				
6				
⋮				
	−9			
20	−10	0	9	10

частный пример

т.к. это победитель, и у всех разное кол-во баллов, сумма очков будет не больше чем в случае, когда все участники расположились подряд (набрали каждое значение от 9 до −10 б.)

т.е. сумма баллов $S \le \frac{(-10+9)\cdot 20}{2} = -10$

ар. прогрессия от −10 до 9

замечу, что при моей системе подсчета очков, кол-во очков $= W_i - L_i$,

значит сумма всех $S = (W_1 + W_2 + W_3 \dots W_{20}) - (L_1 + L_2 + L_3 \dots L_{20}) =$

$S = W - L = 0$, т.к. $W = L$

$0 = S \le -10$ – противоречие,

значит предположение неверно и такой участник есть ч.т.д.

0б.

МАТ-86

№1

Пусть α – угол при основании равнобедренного треугольника, тогда $180-2\alpha$ – угол, лежащий против основания равнобедренного треугольника

сумма косинусов этих углов:

$S=\cos\alpha+\cos\alpha+\cos(180-2\alpha)=2\cos\alpha-\cos2\alpha=2\cos\alpha-$

$-(2\cos^2\alpha-1)=-2\cos^2\alpha+2\cos\alpha+1$

Пусть $t=\cos\alpha$, тогда $y=-2t^2+2t+1$ – квадратичная ф-ция, ~~кото~~ графиком является парабола, ветви вниз, наибольшее значение в вершине

$$t_в=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{-2\cdot2}=\frac{1}{2}$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right)=-2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

Наибольшая сумма косинусов равна $\frac{3}{2}$ при $\cos\alpha=\frac{1}{2}$; $\alpha=60°$

Ответ: $\frac{3}{2}$ ~~6б~~ 7б.

№4 Дано: $b+c>a$, $a>0, b>0, c>0$

Д-ть: $\frac{a}{a+1}<\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{b}{b+1}^{\backslash(a+1)(c+1)}+\frac{c}{c+1}^{\backslash(b+1)(a+1)}-\frac{a}{a+1}^{\backslash(c+1)(b+1)}>0$$

$$\frac{b(c+1)(a+1)+c(b+1)(a+1)-a(c+1)(b+1)}{(b+1)(c+1)(a+1)}>0$$

Знаменатель дроби положителен т.к. $a>0$; $b>0$; $c>$ $\Rightarrow a+1>0; b+1>0; c+$

Р/м числитель дроби:

$b(c+1)(a+1)+c(b+1)(a+1)-a(c+1)(b+1)=b(ac+c+a+1)+$

$bc + bc + ab + b + abc + bc + ac + 1 - abc - ab - ac - a =$

$2bc + 2bc + b + c - a$

$b \cdot c > 0$ т.к. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ по условию

$b \cdot c > 0$ т.к. $b > 0$, $c > 0$ по условию

$b + c - a > 0$

$b + c > a$

$a < b + c$ — дано в условии задачи

Сюда следует, что и числитель дроби положителен.

Значит, $\frac{a}{a+1} < \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}$

3б-

Пусть в стране x — лжецов

Тогда $2017 - x$ — количество рыцарей

Лжецы на два вопроса ответили: „да"
на один — „нет".

Рыцари на один вопрос ответили: „да"
На два других — „нет"

~~Значит.~~

Зная, что всего ответов „да" было:

$S = 2015 + 509 + 511$

Составим уравнение:

$2015 + 509 + 511 = 2x + (2017 - x)$

$-2 + 1020 = x$

$x = 1018$ — лжецов

$2017 - 1018 = 999$ — рыцарей

Ответ: 999

7

Допустим, выбранные 9 точек не лежат в одной плоскости; (точки не совпадают друг с другом)

Р/м I случай при котором по три точки лежит, на каждой прямой параллельной прямой b. По условию необходимо провести четыре прямые параллельные прямой a, так, чтобы все девять точек им принадлежали.

Две параллельные прямые лежат в одной плоскости. Тогда количество параллельных прямых пересекающих шесть точек? равно 3 или 4 (меньше 3 быть не может, если точки не совпадают, более 4 не удовлетворяет условию задачи)

а) Если 3, то, по условию a не параллельна b, нам потребуется больше одной прямой паралельной a.

б) Если 4, то остались ещё точки не принадлежащие этим прямым?

Противоречие |=> параллельные прямые прямой b лежат в одной плоскости |=> все девять точек лежат в одной плоскости

Р/м II случай при котором на одной из прямых, параллельных прямой b, лежит четыре точки? на другой три, на третьей две.

Прямые с четырьмя и тремя точками образуют плоскость, количество прямых параллельных прямой a удовлетворяющих условию задачи равно 4, но остались ещё две точки не принадлежащие данным прямым |=> три параллельные прямые лежат в одной плоскости => все точки лежат в одной плоскости.

Р/м III случай при котором по 4 точки на двух параллельных прямых, и одна точка на третьей прямой. Две прямые с четырьмя точками образуют плоскость. Количество прямых параллельных a и удовлетворяющих условию равно 4, но одна точка не принадлежит этим прямым |=>

МАТ-86

=> параллельные прямые лежат в одной плоскости
=> все точки лежат в одной плоскости.

Р/м IV случай. Если на одной из прямых, параллельных прямой в, будет лежать больше 4 точек, то количество прямых, параллельных прямой а, не будет удовлетворять условию задачи (их будет 5 и более)

2б.

№2

Если (n^2+3n+5) делится на 121, то

$$n^2+3n+5=121\cdot k, \quad k\in \mathbb{Z},$$

$y=n^2+3n+5$ – графиком является парабола ветви вверх $D=b^2-4ac=9-20<0$ т.е. график лежит выше оси Ox и при $k\leq 0$ решений нет.

Р/м $k>0$, $k\in\mathbb{Z}$

$$n^2+3n+5-121k=0$$

$$D=b^2-4ac=9-4(5-121k)=9-20+121\cdot 4k=$$

$$=-11+11^2 4k=11(44k-1)$$

$$n_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{11(44k-1)}}{2}$$

Р/м $\sqrt{11(44k-1)}$, легко видеть, что $44k-1$ не кратно 11. Допустим $44k-1$ является квадратом некоторого числа, учитывая, что $k>0$, $k\in\mathbb{Z}$, под корнем остаётся 11, $\sqrt{11}$ – всегда иррациональное число => n не принадлежит целым числам, т.е. ни при каком $n\in\mathbb{Z}$ выражение n^2+3n+5 не делится на 121.

2б

0б

n^2+2n-1

$D=1+1=2$

1.

$\triangle ABC$ - равнобедренный.

$\angle A = \angle C = \alpha$

$\angle B = 180° - \angle A - \angle C = 180 - 2\alpha$

$\cos\alpha + \cos\alpha + \cos(180 - 2\alpha) = 2\cos\alpha - \cos 2\alpha = 2\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1$

$t = \cos\alpha$

$y = -2t^2 + 2t + 1$

$y' = -4t + 2 = 0$

$-4t = -2$

$t = \frac{1}{2}$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}$ ($\alpha = 60°$) - наибольшее значение косинуса

$y = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = -\frac{2}{4} + 1 + 1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$ - наибольшее значение, которое может принимать сумма косинусов всех углов равнобедренного треугольника. Ответ: $\frac{3}{2}$

2. $n^2 + 3n + 5 = (n+7)(n-4) + 33$

$121 = 11^2$ квадрат простого числа.

$(n+7) - (n-4) = n + 7 - n + 4 = 11 \Rightarrow$ либо и $(n+7)$, и $(n-4)$ делятся на 11, либо ни одно из них не делится на 11

Если и $(n+7)$, и $(n-4)$ делятся на 11, то $(n+7)(n-4)$ будет делиться на 121, но 33 не делится на 121 $\Rightarrow n^2 + 3n + 5$ не будет делиться на 121.

4

4. $\frac{a}{a+1} = \frac{a+1-1}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1}$

$a - \frac{a}{a+1} = \frac{a^2 + a - a}{a+1} = \frac{a^2}{a+1}$, $a^2 > 0$ и $a + 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a > \frac{a}{a+1} = 1 - \frac{1}{a+1}$

Аналогично $\left.\begin{array}{l} b > \frac{b}{b+1} = 1 - \frac{1}{b+1} \\ c > \frac{c}{c+1} = 1 - \frac{1}{c+1} \end{array}\right\} b + c > \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1}$

$1 - \frac{1}{a+1} < a < b + c$

т.к. $a + 1 > 0$, то $1 - \frac{1}{a+1} < 1$.

$b + c > \frac{b}{b+1} + \frac{c}{c+1} = 1 - \frac{1}{b+1} + 1 - \frac{1}{c+1} = 2 - \frac{1}{b+1} - \frac{1}{c+1}$

~~Сравним число~~ $\cancel{\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}}$ ~~с 1.~~

$$\cancel{\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=\frac{c+1+1+b}{(c+1)(b+1)}=\frac{2+c+b}{(b+1)(c+1)}}$$

$$\cancel{\frac{2+c+b}{(b+1)(c+1)}-1=\frac{2+c+b-(bc+b+c+1}{}}$$

$$\cancel{-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}=\frac{-c-1-b-1}{(b+c)(b}}$$

$$\cancel{-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}=\frac{-c-1-b-1}{(b+1)(c+1)}=\frac{-2-c-b}{(b+1)(c+1)}}$$

~~Сравним число~~ $\cancel{-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}}$ ~~с 1.~~

$$\cancel{\frac{-2-c-b}{(b+1)(c+1)}-1=\frac{-2-c-b-(bc+b+c+1)}{(b+1)(c+1)}}=$$

$$=\cancel{\frac{-2-c-b-bc-b-c-1}{(b+1)(c+1)}=\frac{-3-2c-2b-bc}{(b+1)(c+1)}}$$

~~т.к. b, c - положительные, то~~

$$\cancel{\frac{-3-2c-2b-bc}{(b+1)(c+1)}<0 \Rightarrow -\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}<1}.$$

$$-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}=\frac{-c-1-b-1}{(b+1)(c+1)}$$

сравним $\frac{-c-1-b-1}{(b+1)(c+1)}$ с -1

$$\frac{-2-c-b}{(b+1)(c+1)}+1=\frac{-2-c-b+(bc+c+b+1)}{(b+1)(c+1)}=$$

$$\frac{-1+bc}{(b+1)(c+1)}$$ при $bc>1$ $-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}>-1$

Тогда $\frac{a}{a+1}<a<bc$ $\quad 0<\frac{a}{a+1}<1$

$$b+c>2+\left(-\frac{1}{b+1}-\frac{1}{c+1}\right)=\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}$$?

0,5

... т.к. 9 точек на 4 прямых, то на одной из прямых не менее трех ? точек. (эту прямую назовем c) Но никакие 2 точки из этих трех не могут ~~быть~~ быть на прямой, параллельной т.к. a не параллельна b. Значит все три прямые, параллельные b, пересекают c. Значит, выбранные точки лежат в одной плоскости. ?

5. Т.к. лжец ~~говорит и~~ всегда говорит неправду, то по результату опроса он не состоит в своей партии, но состоит в двух других.

l_i - кол-во лжецов в i партии

R_i - кол-во рыцарей в i партии. $\qquad R_1+R_2+R_3$ - ?

$$\begin{cases} R_1+l_2+l_3=2015 \\ R_2+l_1+l_3=509 \\ R_3+l_1+l_2=511 \\ R_3+R_2+R_1+l_1+l_2+l_3=2017 \end{cases}$$

$$R_1+R_2+R_3+2l_1+2l_2+2l_3=3035.$$

$$R_1+R_2+R_3=3035-2(l_1+l_2+l_3)$$

$R_3 + R_2 + R_1 = 2017 - l_1 - l_2 - l_3$

$3035 - 2(l_1 + l_2 + l_3) = 2017 - (l_1 + l_2 + l_3)$

$1018 = l_1 + l_2 + l_3$

$R_1 + R_2 + R_3 = 3035 - 2(l_1 + l_2 + l_3) = 3035 - 2 \cdot 1018 =$

$= 999$ ~~человек~~. рыцарей.

Ответ. 999 рыцарей. 7б